



# Introduction à la théorie de la Viabilité

**Isabelle Alvarez**

INRAE

Pour mieux  
affirmer  
ses missions,  
le Cemagref  
devient Irstea puis  
INRAE



**INRAE**

[www.inrae.fr](http://www.inrae.fr)



# Plan

La théorie mathématique de la viabilité et son intérêt pour maintenir un système dynamique contrôlé dans un ensemble de contraintes

## Poser un problème de viabilité

- Exemple du lac et les exploitations riveraines
- Concepts de la théorie mathématique de la viabilité

## Calculer et utiliser des noyaux de viabilité

- Trajectoires
- Approcher des noyaux de viabilité : comprendre l'algorithme
- Analyse de viabilité

# Poser un problème de viabilité

## Un exemple : les exploitations riveraines du lac

Enjeu : l'eutrophisation des lacs



L'eutrophisation des lacs est un processus d'accumulation de nutriments dans le lac. Le phosphore est principalement concerné (avec l'azote). Il provient des engrais agricoles et des eaux usées.

### Lac oligotrophe :

- Eau claire et saine
- Biodiversité élevée



### Lac eutrophe :

- Eau turbide
- Eau putride et toxique (bloom bactérien)
- Diminution de l'oxygène dissout
- Perte de biodiversité (étouffement d'espèce, développement d'algues)

L'eutrophisation a des effets néfastes sur la qualité de l'eau :

- développement rapide d'algues non consommées : diminution de la lumière et de l'oxygène
- développement de bactéries qui consomment l'oxygène dissout, production de gaz délétères

⇒ Impact sur l'utilisation de la ressource, la biodiversité, le tourisme

⇒ Diminuer les effets de l'eutrophisation n'est pas toujours évident : même en supprimant les apports de phosphore, le lac peut rester eutrophe

# Les exploitations riveraines du lac

Problème posé : le maintien de l'activité agricole et d'un lac oligotrophe



Lac oligotrophe



Lac eutrophe



On désire conserver à la fois un lac en “bonne santé” et l'activité agricole dans le bassin versant

Les exploitants doivent pouvoir exercer leur activité

⇒ apport minimum de Phosphore dans le lac

La population préfère un lac oligotrophe (eau claire)

⇒ valeur limite de Phosphore admissible

# Poser le problème de viabilité pour le lac et les exploitations riveraines

Décrire le système : quelles sont les variables d'état ?



Lac oligotrophe

La “bonne santé” du lac peut être mesurée par la concentration de phosphore (P) dissoute dans le lac

La présence d’une activité agricole peut être reliée aux apports de phosphore dans le lac (L)  
P et L suffisent à décrire le système “le lac et ses exploitations riveraines”

=> Ce sont les variables d’état du système

Lac eutrophe



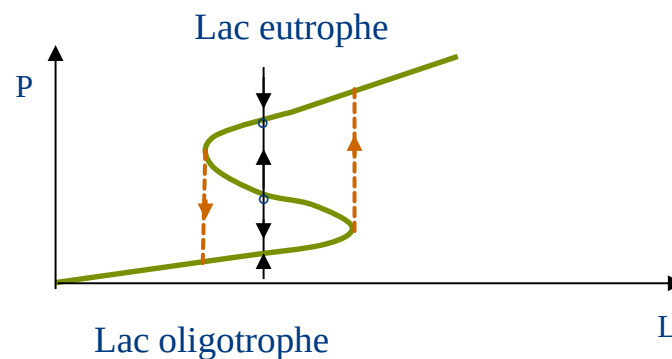
# Poser le problème de viabilité pour le lac et les exploitations riveraines

Décrire les dynamiques du systèmes : comment évoluent les variables ?



Lac oligotrophe

le lac suit une dynamique « connue »  
(Carpenter et al, 99)



Lac eutrophe



$$\frac{dP}{dt}(t) = - \underset{\text{perte}}{b.P(t)} + \underset{\text{apports extérieurs}}{L(t)} + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}$$

recyclage depuis les alluvions

# Poser le problème de viabilité pour le lac et les exploitations riveraines

Décrire les contraintes : quels sont les états souhaitables du système ?



Lac oligotrophe

- La concentration en Phosphore (P) doit rester sous un seuil pour prévenir l'eutrophisation

$$P(t) \leq P_{max}$$

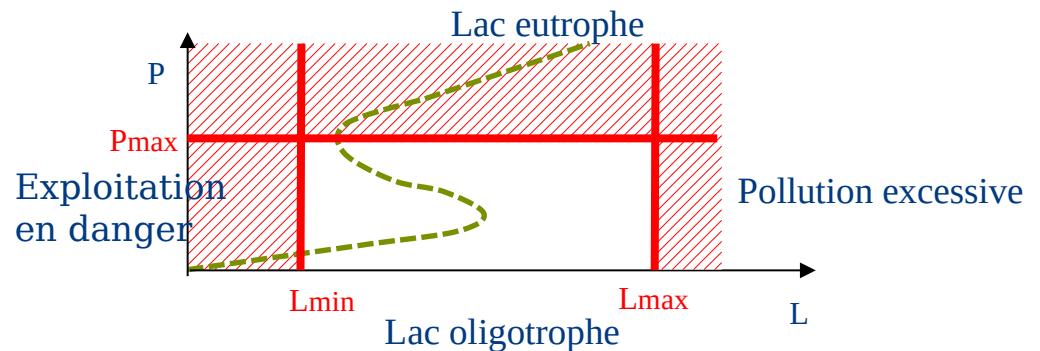
- Les apports en Phosphore (L) doivent être autorisés au-dessus d'un seuil pour permettre aux exploitations d'exercer leur activité

$$L(t) \geq L_{min}$$

- Les apports en Phosphore (L) doivent être maintenus en-dessous d'un seuil pour éviter une pollution excessive de l'environnement

$$L(t) \leq L_{max}$$

Lac eutrophe



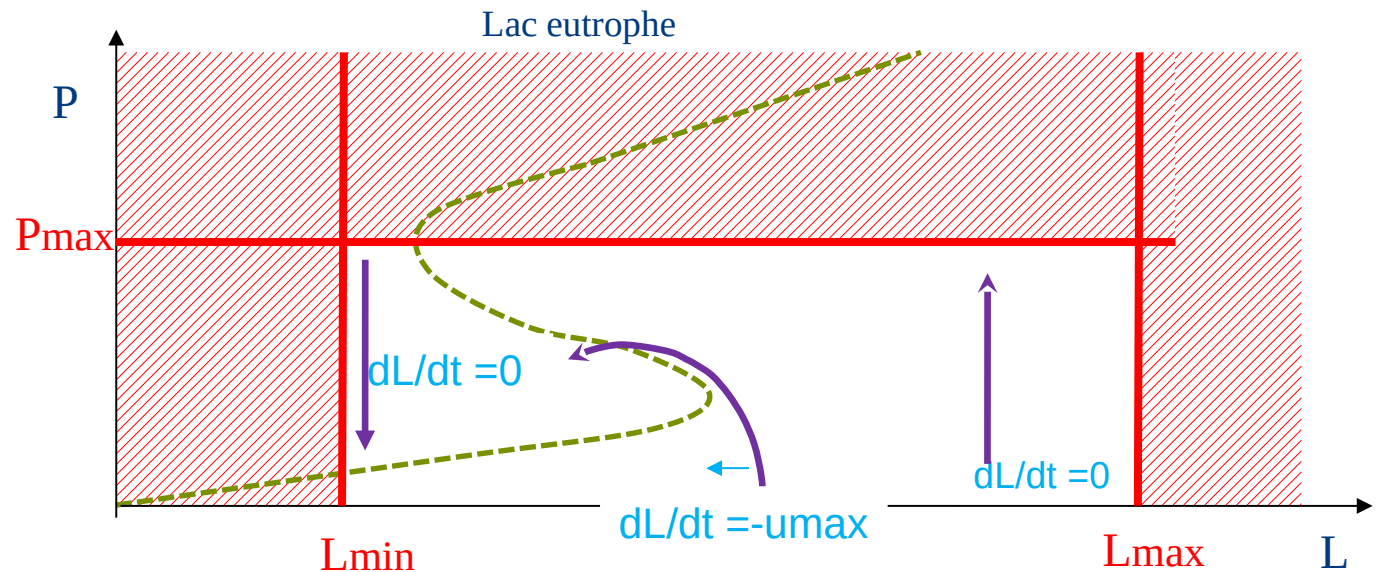
# Poser le problème de viabilité pour le lac et les exploitations riveraines

Décrire les contrôles: quelles sont les actions possibles ?



- Limiter les variations des apports en phosphore par la réglementation
- Dépolluer quand la majorité des apports se fait par les rivières alimentant le lac
- Inciter à des changements de pratiques moins polluantes

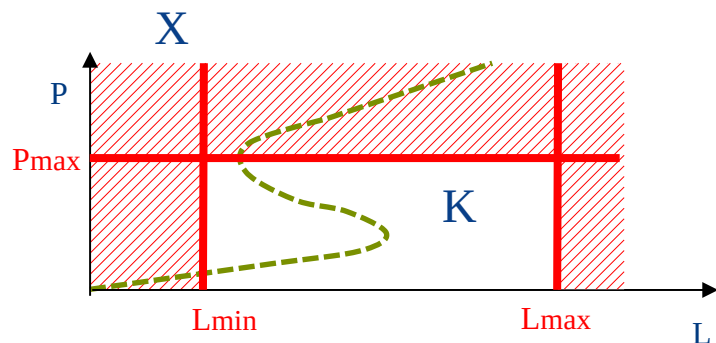
Lac oligotrophe





# Poser le problème de viabilité pour le lac et les exploitations riveraines

Poser le problème de viabilité (Martin, 2004)



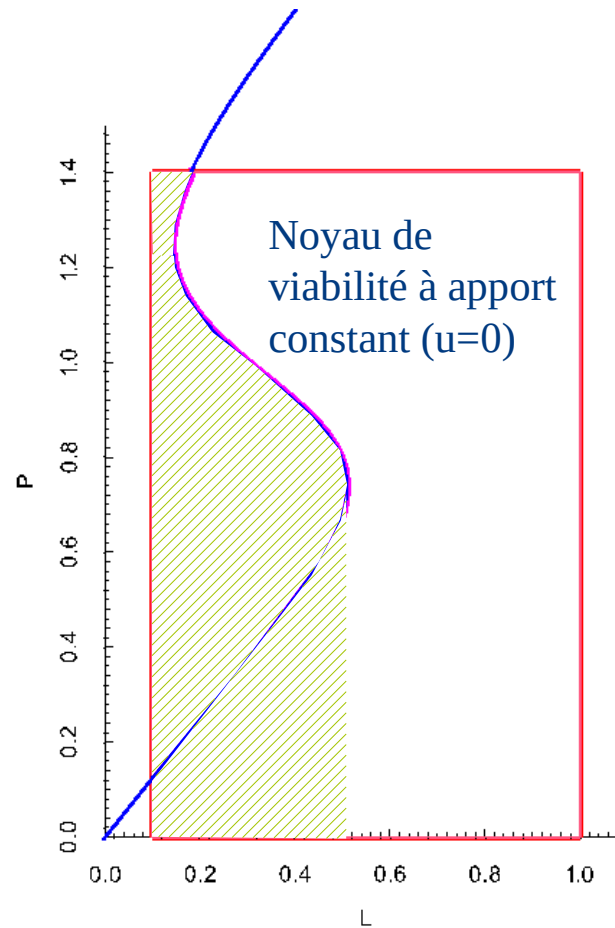
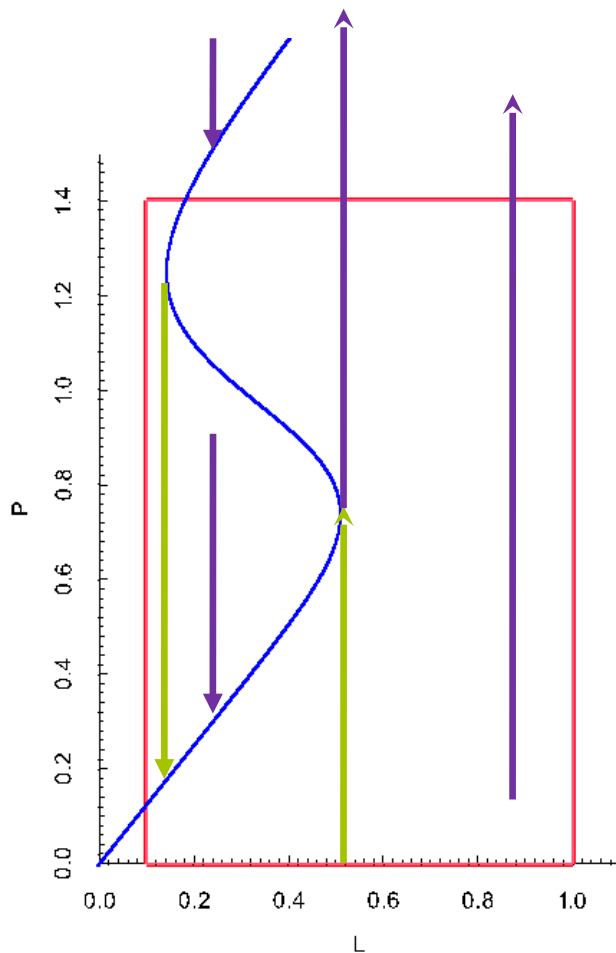
- Maintenir le système décrit par  $(L(t), P(t))$  dans l'ensemble de contrainte  $K$  avec les contrôles admissibles
- C'est chercher les états du système pour lesquels il existe une fonction de contrôle  $u(t)$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (L(t), P(t)) \in X \\ \frac{dL}{dt}(t) = u(t) \\ \frac{dP}{dt}(t) = -b.P(t) + L(t) + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)} \\ u \in U = [-u_{\max}; u_{\max}] \\ (L(t), P(t)) \in K = [L_{\min}; L_{\max}] \times [0; P_{\max}] \end{array} \right.$$

# Concepts de la théorie de la viabilité

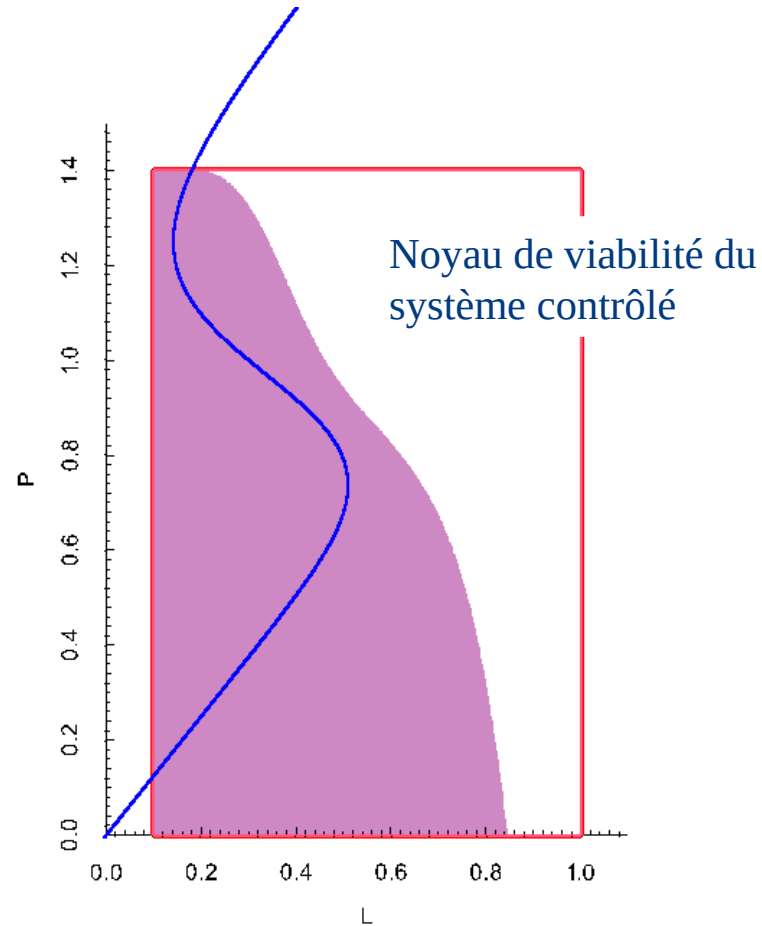
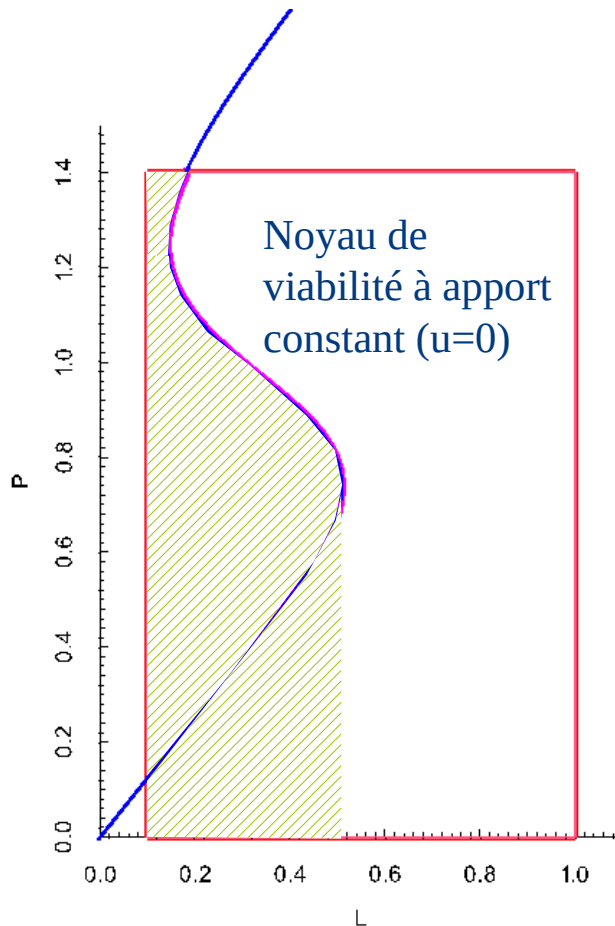
La Bible en deux éditions : Aubin,91 ; Aubin, Bayen et P. Saint-Pierre, 2011

L'ensemble des états à partir desquels il est possible de contrôler le système pour rester dans l'ensemble des contraintes est le noyau de viabilité.



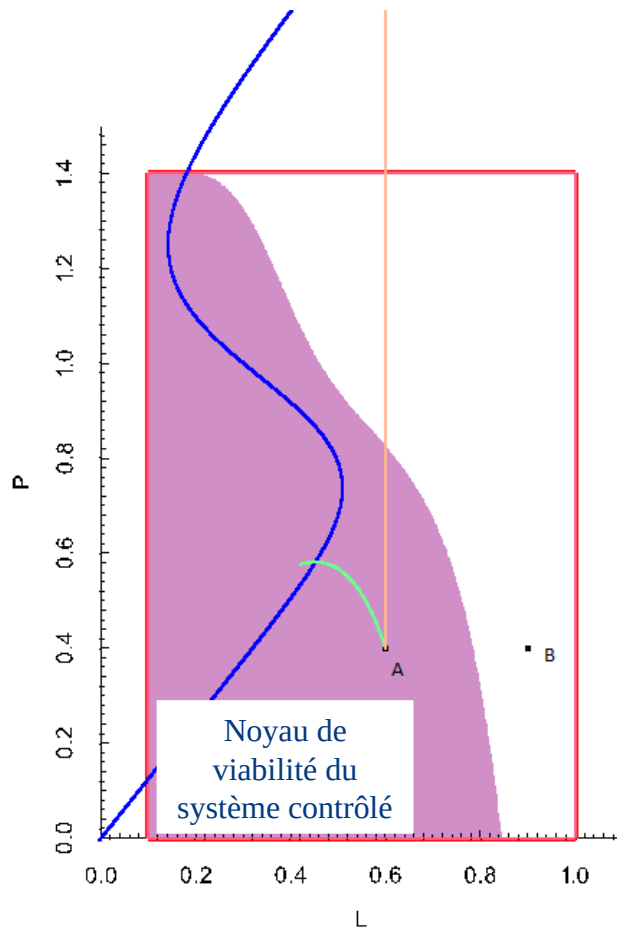
# Concepts de la théorie de la viabilité

L'ensemble des états à partir desquels il est possible de contrôler le système pour rester dans l'ensemble des contraintes est le noyau de viabilité.



# Concepts de la théorie de la viabilité

L'ensemble des états à partir desquels il est possible de contrôler le système pour rester dans l'ensemble des contraintes est le noyau de viabilité.

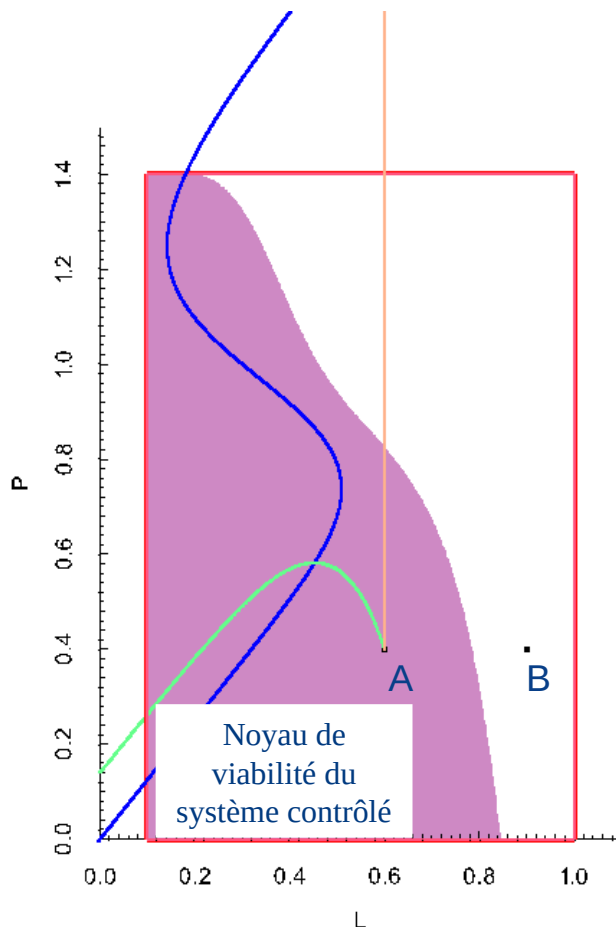


A partir du point A, si les apports restent constants, le lac finit par devenir eutrophe  
 A fait partie du noyau de viabilité, on peut trouver une suite de contrôles qui permet de rester dans le noyau

- Avec  $u = -0.09$

# Concepts de la théorie de la viabilité

L'ensemble des états à partir desquels il est possible de contrôler le système pour rester dans l'ensemble des contraintes est le noyau de viabilité.

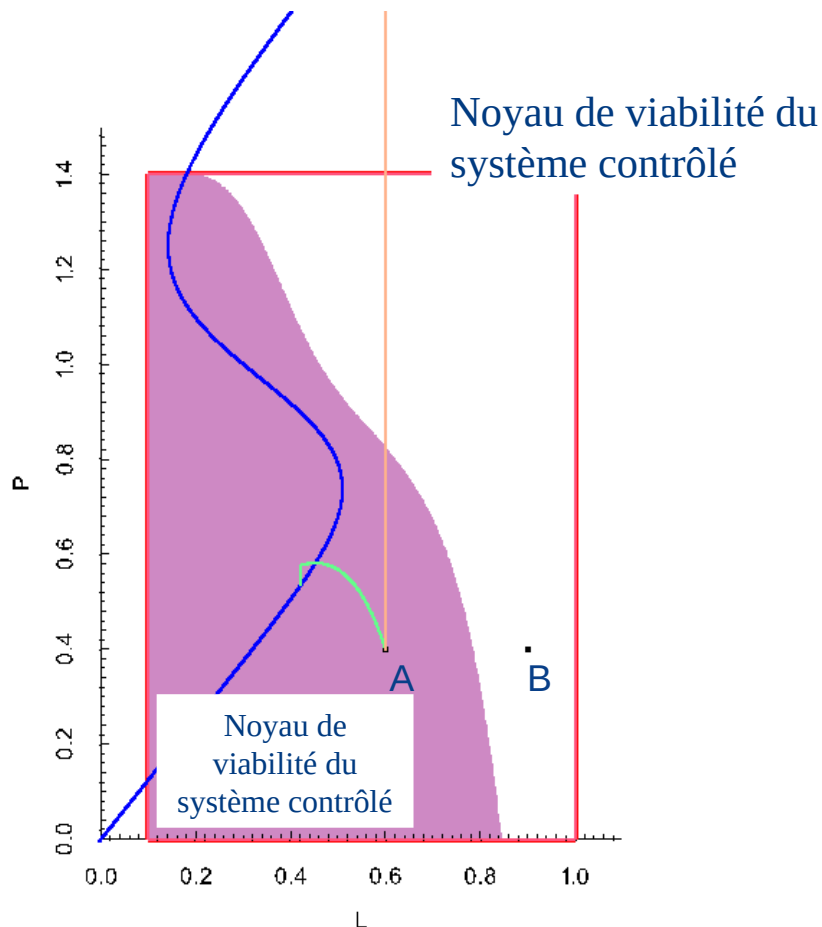


A partir du point A, si les apports restent constants, le lac finit par devenir eutrophe  
 A fait partie du noyau de viabilité, on peut trouver une suite de contrôles qui permet de rester dans le noyau

- Avec  $u = -0.09$
- Mais au bout d'un moment les exploitations agricoles ne peuvent plus vivre

# Concepts de la théorie de la viabilité

L'ensemble des états à partir desquels il est possible de contrôler le système pour rester dans l'ensemble des contraintes est le noyau de viabilité.

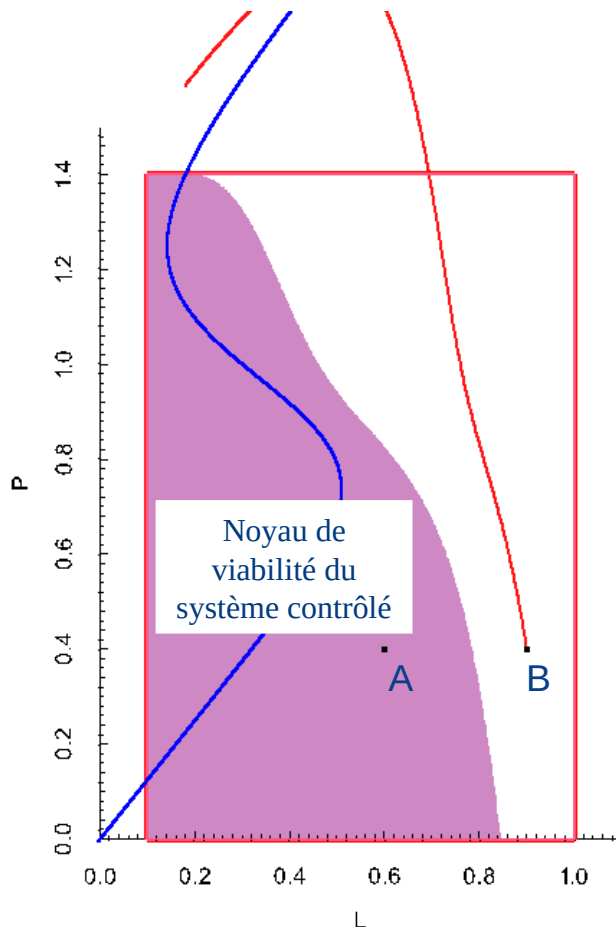


A partir du point A, si les apports restent constants, le lac finit par devenir eutrophe. A fait partie du noyau de viabilité, on peut trouver une suite de contrôles qui permet de rester dans le noyau

- Avec  $u = -0.09$
- Puis  $u = 0$

# Concepts de la théorie de la viabilité

L'ensemble des états à partir desquels il est possible de contrôler le système pour rester dans l'ensemble des contraintes est le noyau de viabilité.



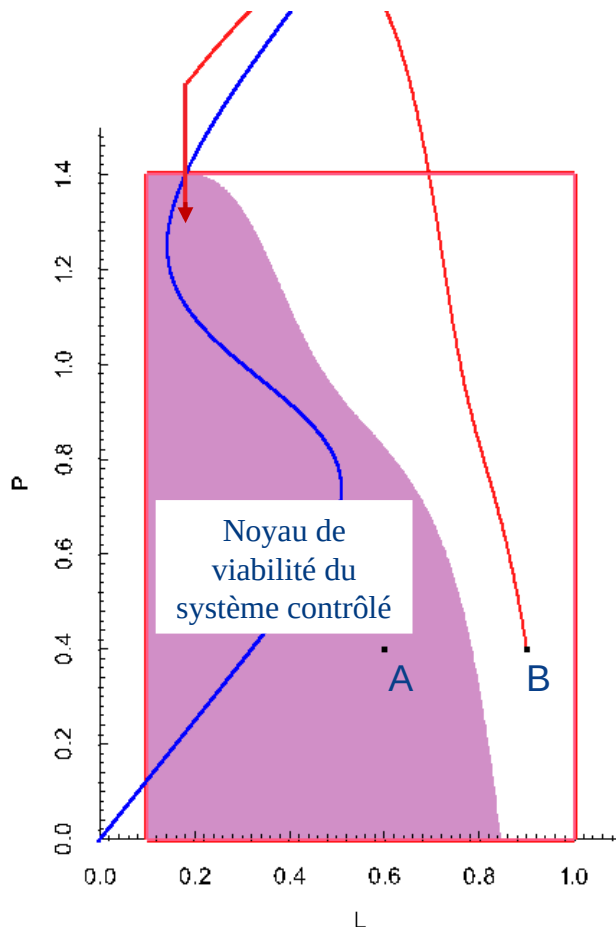
A partir du point *B*, aucune suite de contrôles ne permet de rester dans l'ensemble des contraintes

- Avec  $u = -0.09$ , ce qui représente la diminution maximale possible, le lac finit par devenir eutrophe

# Concepts de la théorie de la viabilité

L'ensemble des états à partir desquels il est possible de contrôler le système pour rester dans l'ensemble des contraintes est le noyau de viabilité.

L'ensemble des états à partir desquels il est possible de revenir au noyau de viabilité est le bassin de capture du noyau de viabilité



A partir du point  $B$ , aucune suite de contrôles ne permet de rester dans l'ensemble des contraintes

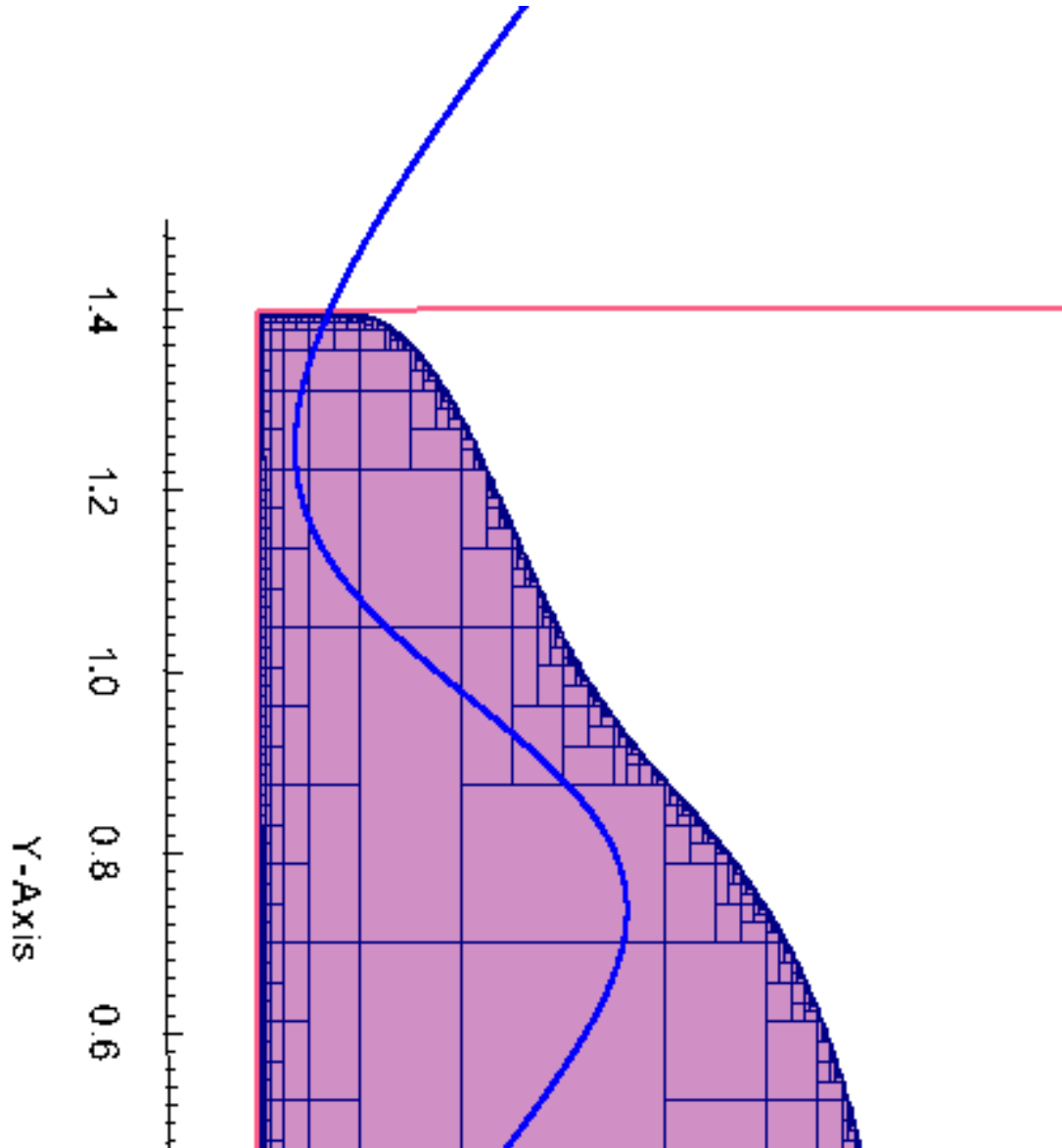
- Avec  $u = -0.09$ , ce qui représente la diminution maximale possible, le lac finit par devenir eutrophe
- Mais il finira par redevenir oligotrophe en poursuivant avec  $u = -0.09$  puis  $u = 0$

=> Le point  $B$  appartient au bassin de capture du noyau de viabilité

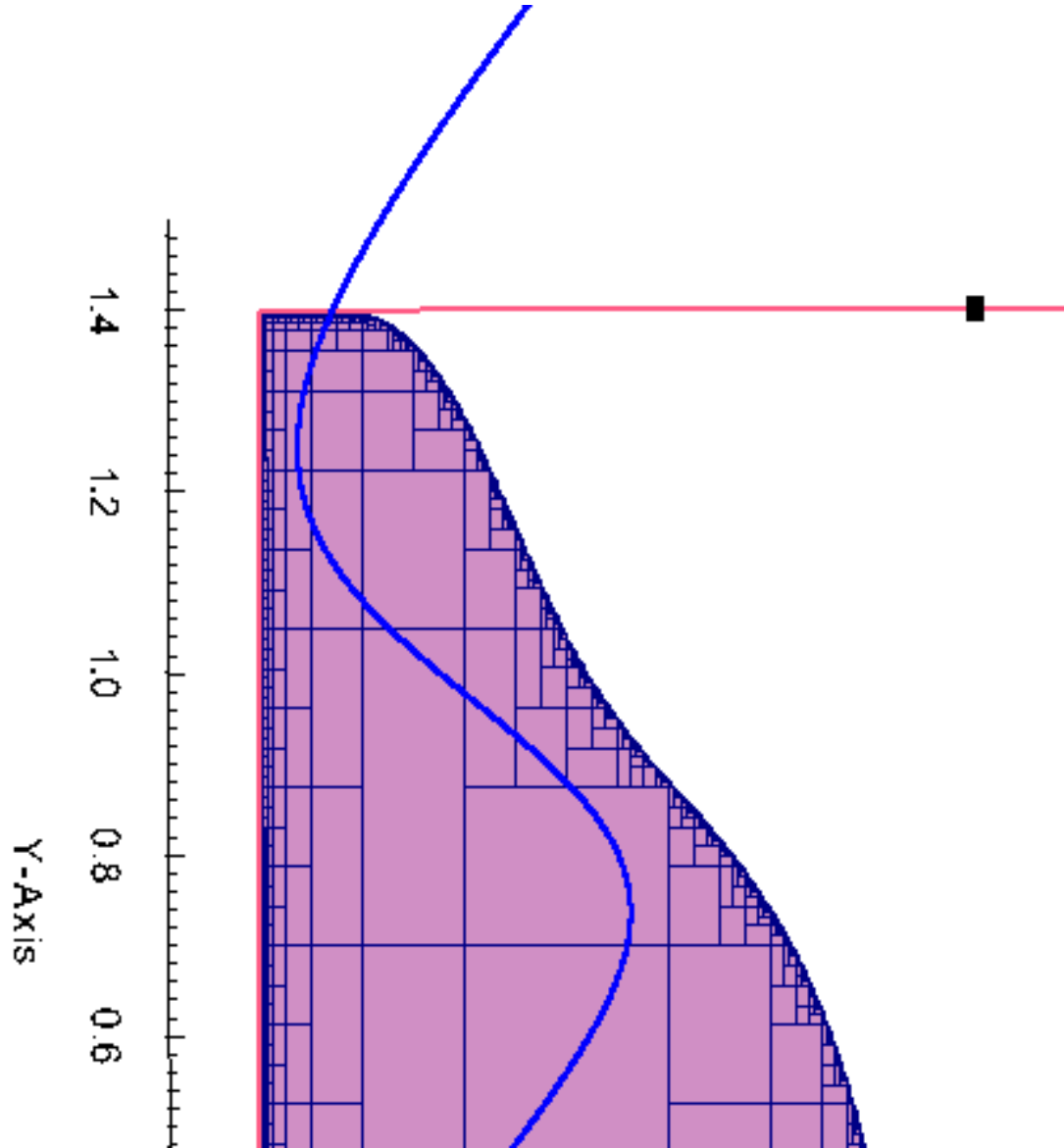
Le système n'est pas viable en  $B$ , mais il est **résilient**. L'eutrophisation est inéluctable, mais il sera possible de revenir durablement à un état viable



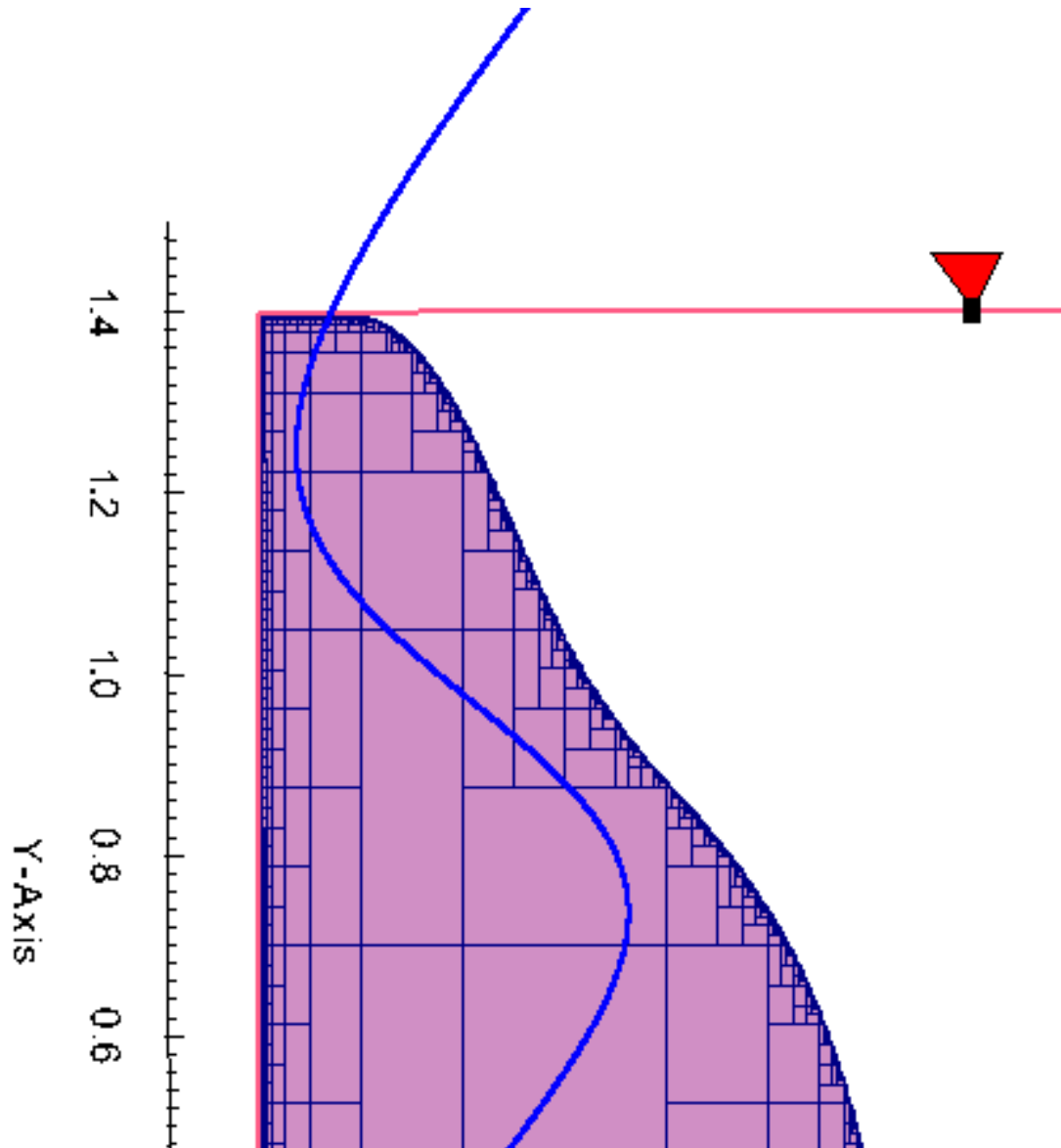
# Approcher des noyaux de viabilité



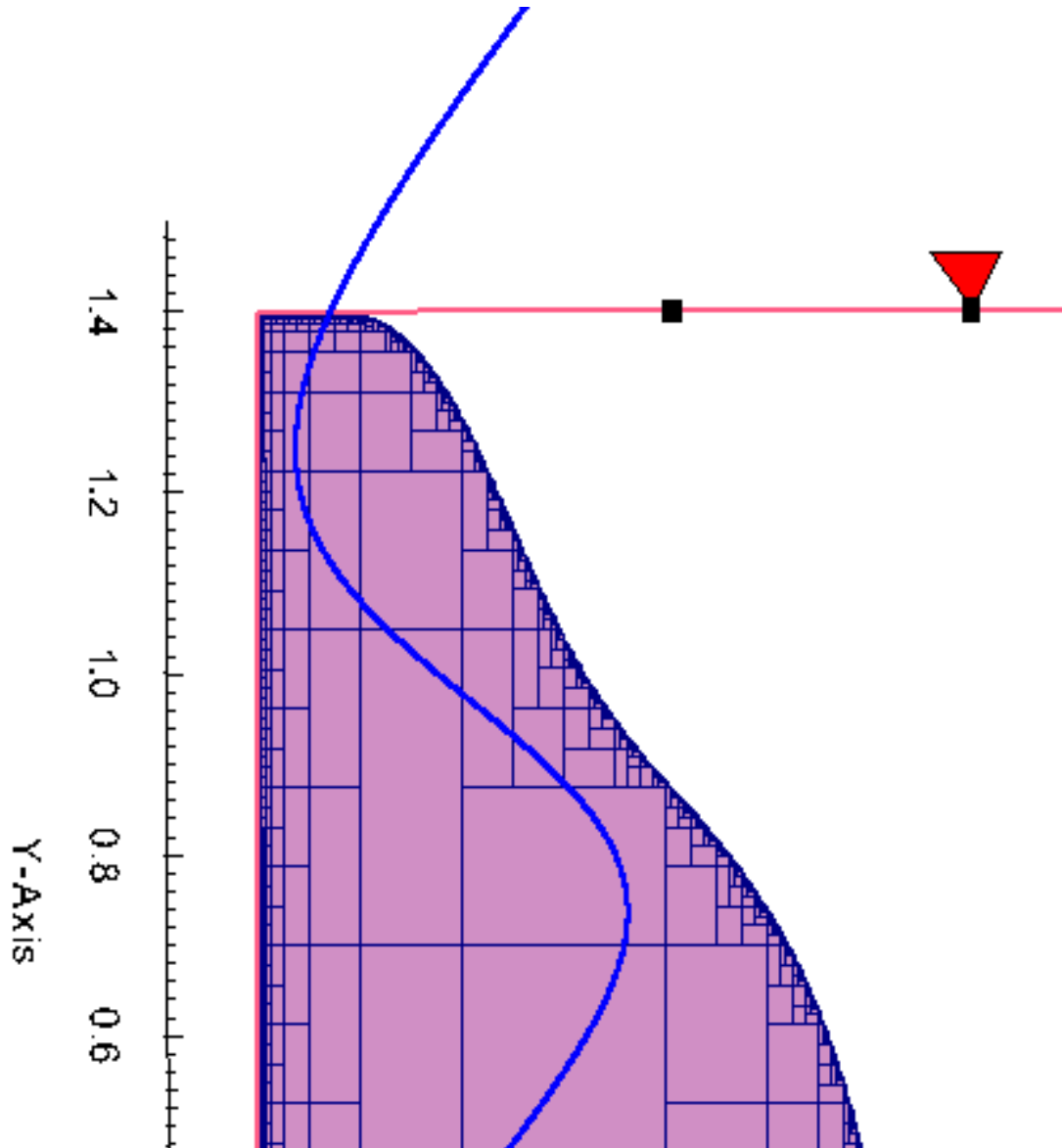
# Approcher des noyaux de viabilité



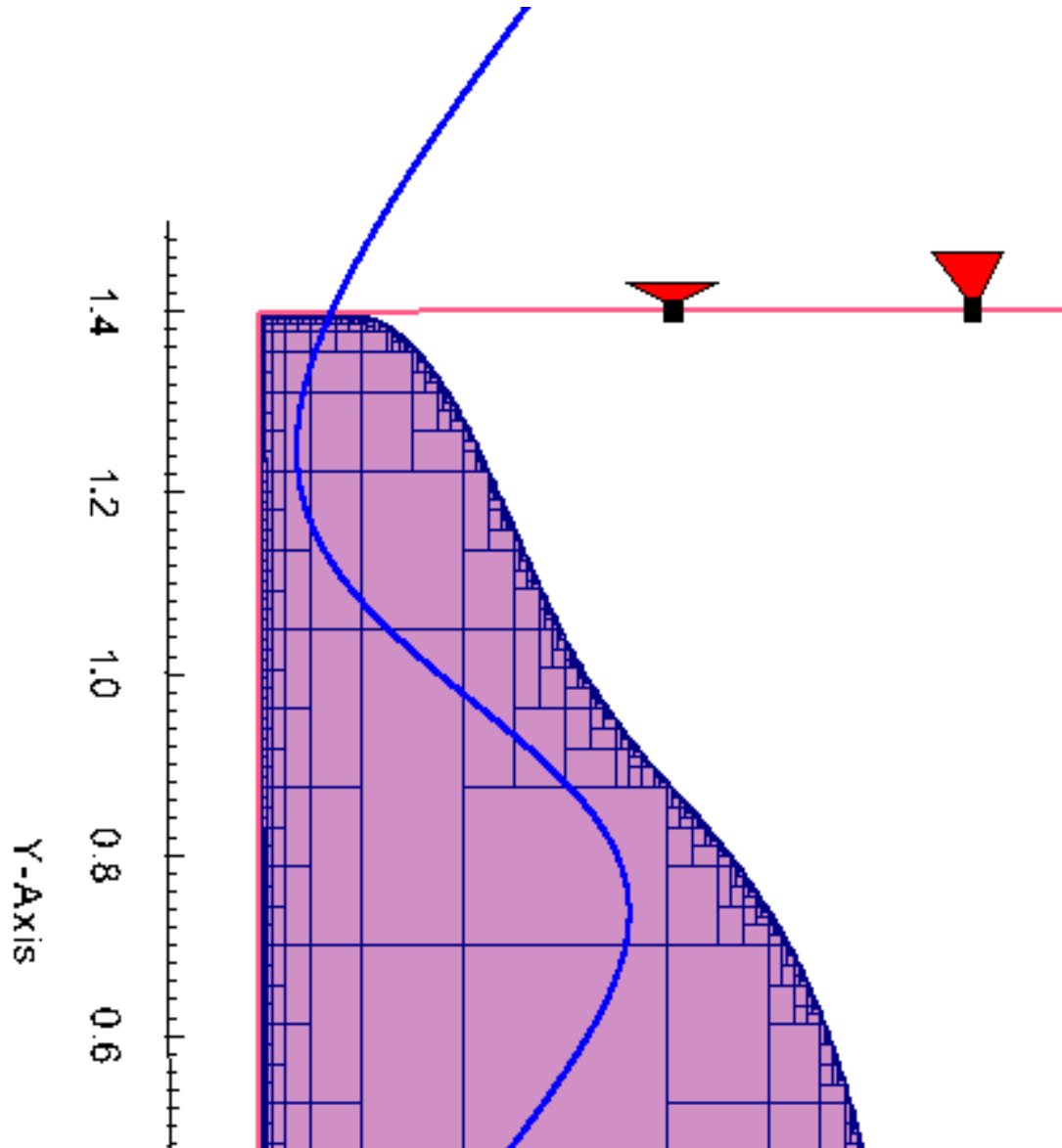
# Approcher des noyaux de viabilité



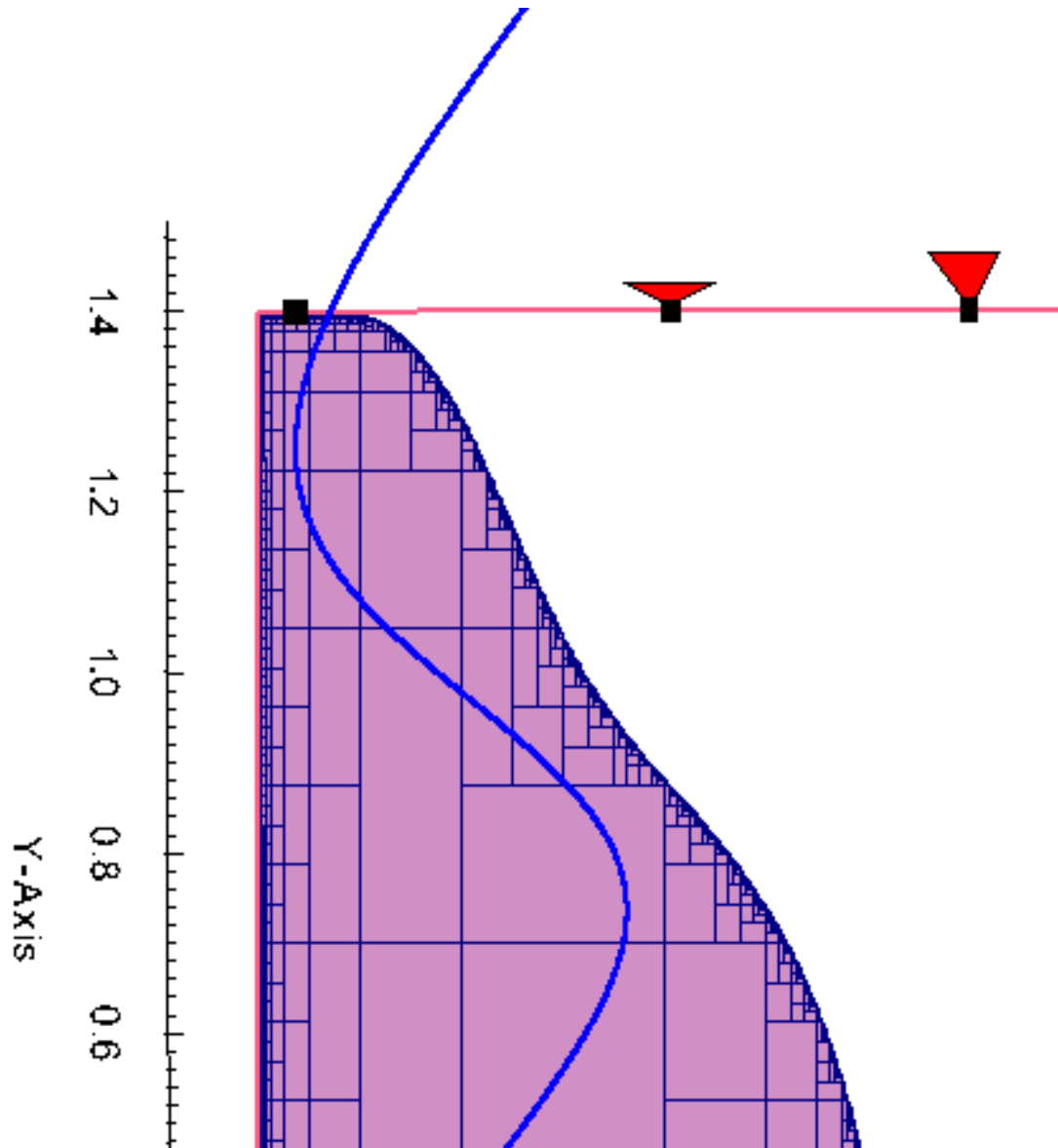
# Approcher des noyaux de viabilité



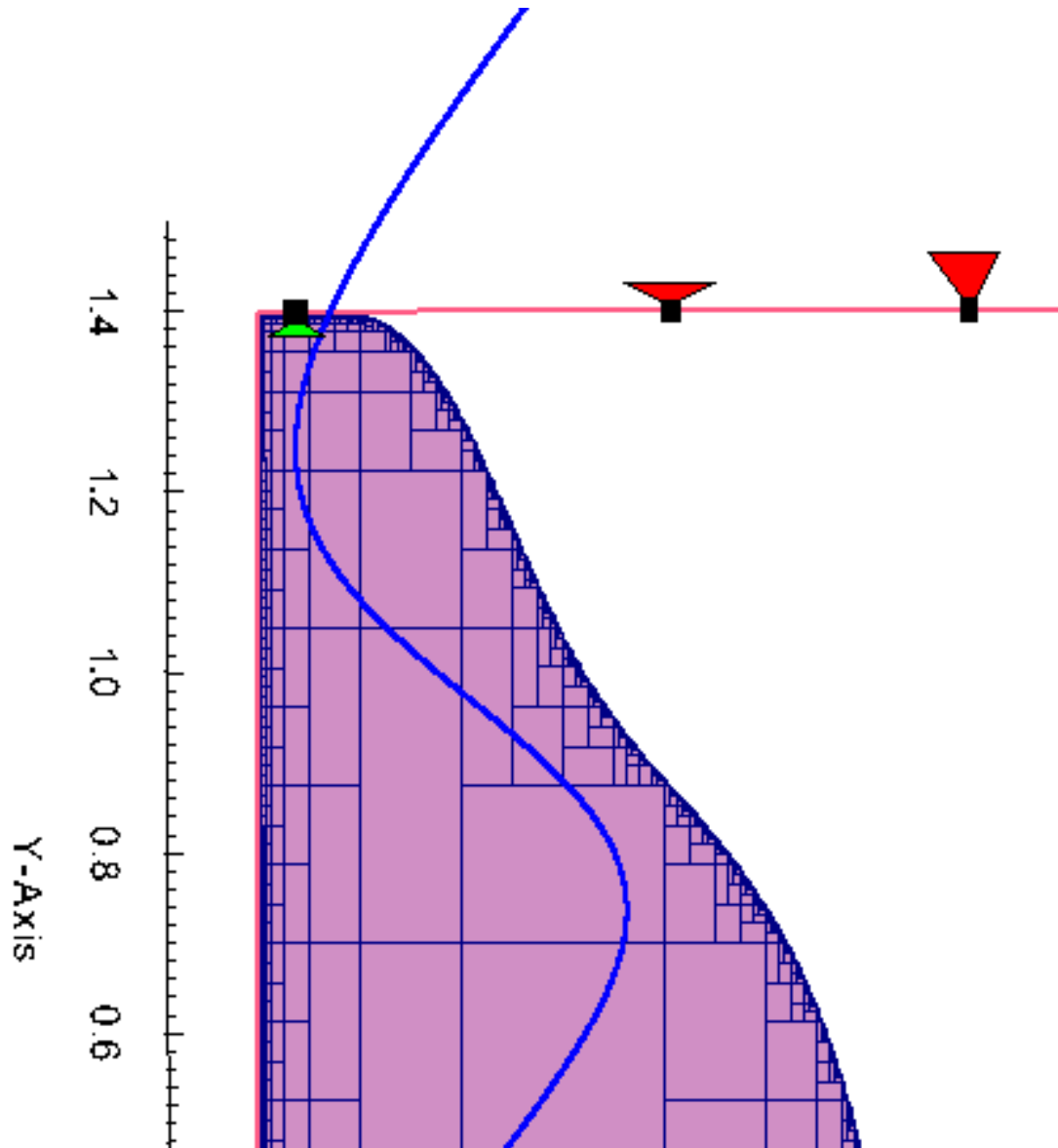
# Approcher des noyaux de viabilité



# Approcher des noyaux de viabilité



# Approcher des noyaux de viabilité



# Approcher des noyaux de viabilité : bibliothèques de calcul

## **Schéma numérique original de Patrick Saint-Pierre (Saint-Pierre, 1994)**

Garantit la CV vers le noyau théorique

Implémenté dans ViabLab par Anya Desilles (2021)

<https://github.com/lastre-viab/VIABLAB>

**Des algorithmes d'approximations généralistes basés sur des grilles régulières, des fonctions de classifications (SVM, kd-Tree, NN, ...)**

<https://gitlab.iscpif.fr/viability/viabilitree>

Avec ou sans garantie de CV vers le noyau théorique

**Des algorithmes spécialisés (cas linéaire, cas discret, cas stochastique, calculs de trajectoires, etc.)**

- Exemple pour le calcul de trajectoires

<https://github.com/socsol/vikaasa>

- Algorithmes de programmation dynamique





# Utiliser les noyaux de viabilité

## Analyse du noyau de viabilité

- Stratégies de contrôle viable
- Noyau vide
- Découverte

## Optimisation a posteriori

- Utiliser la frontière du noyau de viabilité
- Equité intergénérationnelle

## Vers une ingénierie du développement durable

- Formalisme adapté
- Formalisation des concepts du DD (robustesse, résilience, ...)

# Lois de contrôle et optimisation

Avec les stratégies viables on peut contrôler le système pour qu'il reste toujours dans le noyau de viabilité

## Trajectoires "lourdes"

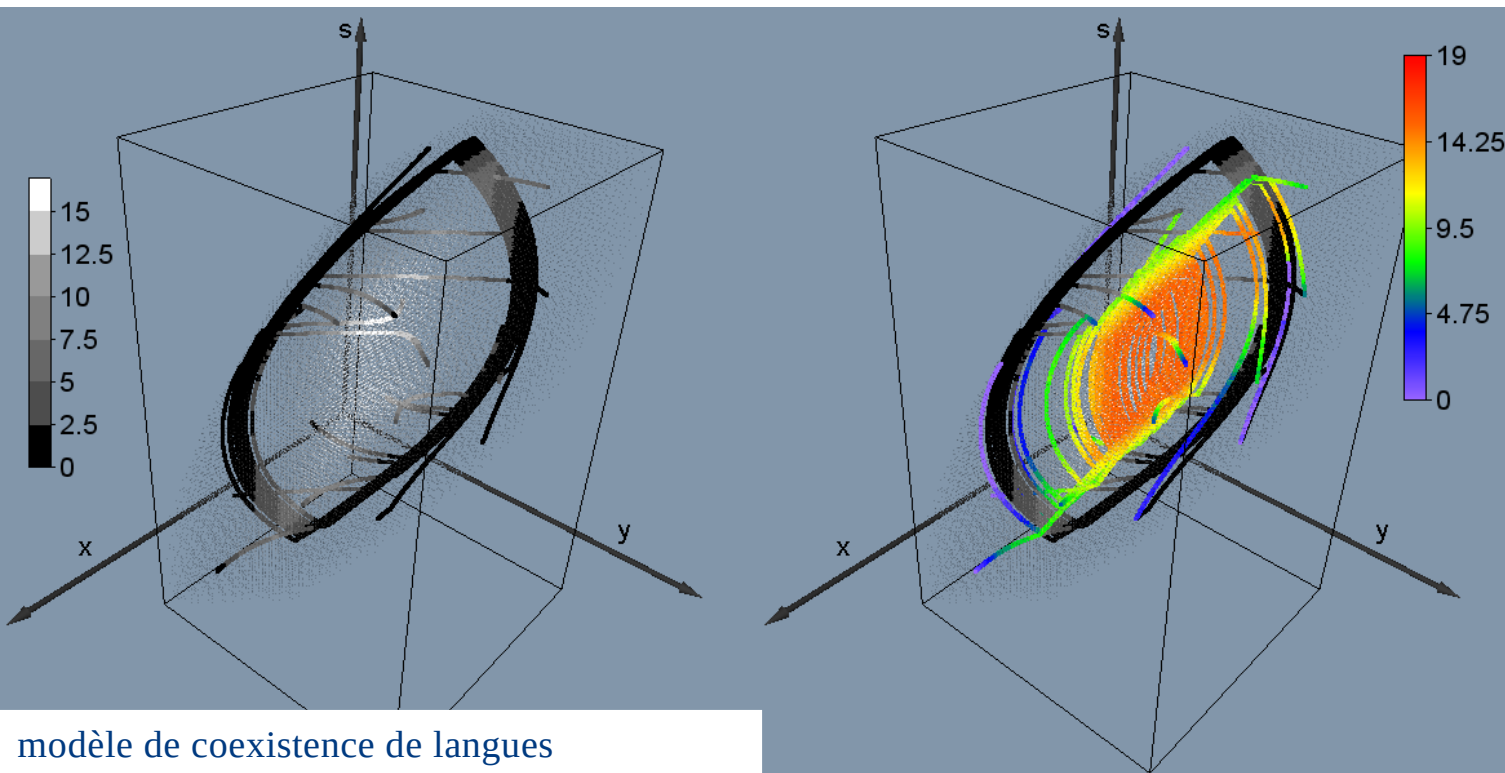
minimiser  $\left\| \frac{du}{dt} \right\|$  à chaque pas de temps

Aubin & Frankowska, 1984

## Trajectoires "lentes"

minimiser  $\|u\|$  à chaque pas de temps

Falcone & Saint-Pierre, 1987



Trajectoires  
"prudentes"  
(à distance  $m$  de la  
frontière du noyau)

Alvarez & Martin, 2011

modèle de coexistence de langues

Abrams and Strogatz, Nature, 2003 ; Bernard & Martin, 2012

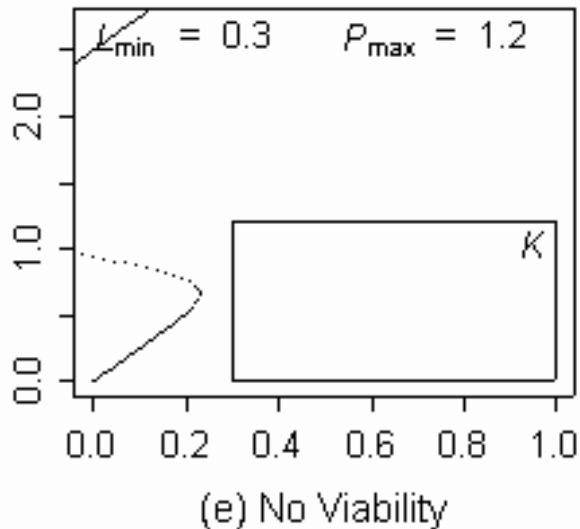
# Utiliser les noyaux de viabilité

Analyse du problème : Noyau vide ou hors du noyau sans possibilité de retour

Exemple :



Un petit lac de montagne pourra ne pas supporter une activité agricole intensive dans son voisinage



## Que faire ?

Changer le problème :

Les contraintes

Les contrôles

Le système

# En résumé : poser un nouveau problème de viabilité

Les questions à se poser

Quels sont les comportements souhaitables ?

- Comment décrire les comportements souhaitables ?
- Comment leur faire correspondre une zone de l'espace ?

Quelles sont les variables du problème ?

- Quelles variables sont nécessaires pour décrire les comportements souhaitables ?
- En déduire l'ensemble des contraintes.

On doit étudier la dynamique et l'effet des contrôles

Quels sont les contrôles du problème ?

- Quelles actions sont envisageables pour modifier l'évolution ?
- Suggérer des contrôles possibles ...

# En résumé

## Les caractéristiques de la méthode

### Les contraintes sont arbitraires

- Une part essentielle de la définition du problème consiste à fixer les contraintes et les contrôles admissibles.
- C'est là que doit se concentrer les efforts (et non sur la résolution)

### Les contraintes sont un sous-ensemble de l'espace des états

- La description du problème doit ajouter autant de variables que nécessaire

$$\left\{ \begin{array}{l} (L(t), P(t)) \in X \\ \frac{dL}{dt}(t) = u(t) \\ \frac{dP}{dt}(t) = -b.P(t) + L(t) + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)} \\ u \in U = [-u_{\max}; u_{\max}] \\ (L(t), P(t)) \in K = [L_{\min}; L_{\max}] \times [0; P_{\max}] \end{array} \right.$$

Les limites de la méthode

L'évolution des variables doit être connue

- La dynamique est connue

L'effet des contrôles doit être connu

- Un contrôle fait partie de la dynamique

# Vers une ingénierie du développement durable

Atout de la viabilité : une formulation de problème centrée sur les contraintes qui peuvent évoluer dans le temps

**Viabilité** : maintenir un système dynamique dans un ensemble de contraintes

(Aubin, 91; De Lara et Doyen,07)

- Les contraintes s’expriment dans l’espace d’état
- L’effet des contrôles fait partie du modèle
- ...

**En pratique** : on n’est pas obligé de choisir un critère d’optimisation ou de scénario d’action prédéfini, mais on choisit les zones de fonctionnement souhaitable et les actions possibles (comme dans la démarche comMod (Barreteau 03, Etienne, 10) , on déplace la négociation)

**Intérêt** : formalisme bien adapté

- à la gestion environnementale (seuils, évitement, difficulté à définir ce qui est optimal, etc.)
- à la négociation entre acteurs
- à la prise en compte de la durabilité (résilience, robustesse, etc.)
- au calcul de résilience (Martin, 04)

Discussion directe sur les  
contraintes et les contrôles