Étude de viabilité versus commande optimale

Illustration en gestion de ressources forestières

Alain Rapaport

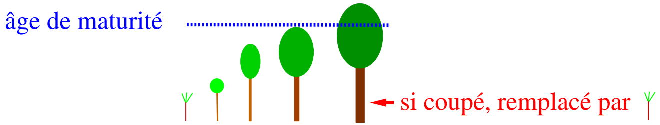
UMR MISTEA Montpellier

Webinaire Viabilité - 4 février 2021

Une modélisation simplifiée

Considérons une exploitation mono-spécifique de S parcelles.

Hypothèses :



- les arbres d'une parcelle ont tous le même âge, et croissent uniformément sur chaque parcelle,
- la décision $u(t)$ à l'année t est le nombre de parcelles exploitées dans l'année, qui consiste à couper tous leurs arbres et à replanter par de jeunes arbustes
- seuls les arbres d'âge supérieur ou égal à n ont une (même) valeur sur le marché
- on néglige la mortalité naturelle des arbres

Représentation de la dynamique

$$x(t) \in \mathbb{N}^n \text{ où } \left| \begin{array}{l} x_1(t) = \text{nb de parcelles d'âge} \geq n \\ x_i(t) = \text{nb de parcelles d'âge} \in [i, i+1[\;\; (i < n) \end{array} \right.$$

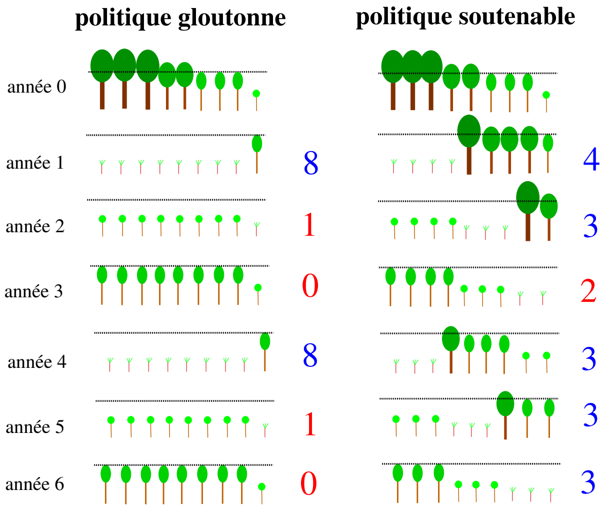
Décisions possibles à la date t : $u(t) \in \{0, \cdots, x_1(t) + x_2(t)\}$.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ u(t) \in [0, Cx(t)] \end{array} \right.$$

$$\text{avec } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{et } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Politiques particulières



Critère d'exploitation

$$J_T(x_0, u(\cdot)) = \sum_{t=0}^{T} \delta^t U(u(t)) + \phi_T(x(T)) \to \max_{u(\cdot)}$$

où $\left| \begin{array}{ll} \delta \in]0,1[: & \text{facteur d'actualisation} \\ U(\cdot): & \text{fonction d'utilité (t.q. } U' > 0 \text{ et } U'' < 0) \end{array} \right.$

Argumentation de Faustmann : quelque soit la date de fin T

$$\begin{aligned} \phi_T(x(T)) &= \max_{u(\cdot)} \phi_{2T}(x(2T) + \sum_{t=T}^{2T} \delta^T U(u(t)) \\ &= \max_{u(\cdot)} \phi_{3T}(x(3T) + \sum_{t=T}^{3T} \delta^T U(u(t)) = \cdots \end{aligned}$$

▶ **critère en horizon infini :** $J(x_0, u(\cdot)) = \lim_{T \to +\infty} \sum_{t=0}^{T} \delta^t (u(t))$

Équation de Bellman

La fonction valeur

$$V(x_0) := \max_{u(\cdot)} J(x_0, u(\cdot)), \quad x_0 \in \mathcal{S}$$

est l'unique solution (bornée) de l'équation de Bellman

$$V(x) = \max_{u \in [0, Cx]} \{U(u) + \delta V(Ax + Bu)\}, \quad x \in \mathcal{C}$$

Combinatoire

$$\mathcal{S} := \left\{ x \in \mathbb{N}^n \text{ t.q. } \sum_{i=1}^{n} x_i = S \right\} \Rightarrow \text{card}(\mathcal{S}) = \frac{(S+n-1)!}{(n-1)!S!}$$

Exemples :

- $S = 9,\ n = 4 \Rightarrow \text{card}(\mathcal{S}) = 220$
- $S = 24,\ n = 4 \Rightarrow \text{card}(\mathcal{S}) = 2935$
- $S = 24,\ n = 10 \Rightarrow \text{card}(\mathcal{S}) = 4.10^7$
- $S = 100,\ n = 20 \Rightarrow \text{card}(\mathcal{S}) \simeq 5.10^{21}$

Politique gloutonne

Définition. $x \mapsto u_G[x] = Cx, \quad \forall x \in \mathcal{S}$ **aucune anticipation !**

$\Rightarrow$ trajectoires périodiques avec

$$u(t) = \left| \begin{array}{ll} x_1(0) + x_2(0) & t = 0 \mod (n-1) \\ x_3(0) & t = 1 \mod n \\ \vdots & \vdots \\ x_n(0) & t = n-2 \mod (n-1) \end{array} \right.$$

sont fortement dépendantes de la condition initiale...

Politique soutenable

Forêt équienne : $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{u} \\ \vdots \\ \bar{u} \end{bmatrix}$ *(en supposant $\bar{u} = S/(n-1)$ entier)*

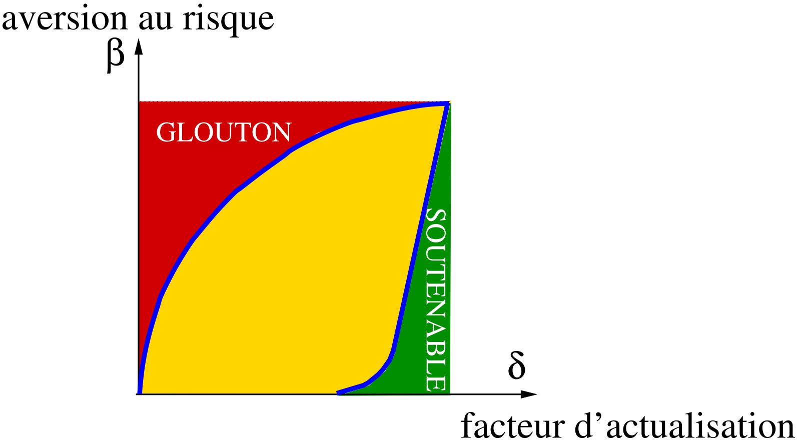
Propriétés.

- $V(x) \leq \dfrac{V(\bar{u})}{1-\delta}$ pour tout $x \in \mathcal{S}$
- $x_0 = \bar{x} \Rightarrow \{u^\star(t) = \bar{u},\ x^\star(t) = \bar{x},\ \forall t > 0\}$ est optimal

Définition. Une politique telle que $x(\cdot)$ rejoint $\bar{x}$ en temps fini est dite *soutenable*

Analyse des solutions de l'équation de Bellman

$$U(u) = u^{\beta}, \qquad \beta \in (0,1)$$



Approche de viabilité

Contrainte de recette minimale : $u(t) \geq \underline{u} > 0, \ \forall t \geq 0.$

1. Pour quelles valeurs de $\underline{u}$ existe t'il des solutions faisables ?
2. Soit $x_0 \in \mathcal{S}$, pour quelles valeurs de $\underline{u}$ existe t'il une trajectoire faisable ?

▶ **Problème de viabilité :**

$$\text{Soit } \mathcal{K}(S, n, \underline{u}) := \{x \in \mathcal{S}, \ Cx \geq \underline{u}\},$$

1. Pour quels $\underline{u}$ a-t-on $Viab(\mathcal{K}(S, n, \underline{u})) \neq \emptyset$?
2. Pour quels $\underline{u}$ a-t-on $x_0 \in Viab(\mathcal{K}(S, n, \underline{u}))$?

Étude de viabilité

$$\text{Soit } T = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Proposition 1.

$$\underline{u} > \underline{u}^*(S,n) := \frac{S}{\mathbb{1}'\mathcal{O}^{-1}(\mathbb{1} - T\mathcal{O}AB)} \Longleftrightarrow \mathrm{Viab}(S,n,\underline{u}) = \emptyset$$

On trouve $\underline{u}^*(S,n) = \frac{S}{n-1}\dots$

Extensions à des matrices plus générales

Exemple.

$$A = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 1-\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-\alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

S	9	9	20	20	100	100
n	4	4	10	10	20	20
card($\mathcal{S}$)	220	220	10^7	10^7	5.10^{21}	5.10^{21}
α	0	0.1	0	0.1	0	0.1
u^*	3	2.42	2.22	1.26	5.26	1.56

Caractérisation du noyau de viabilité

Proposition 2. Soit $\underline{u} \leq \underline{u}^*(S, n)$. On a

$$\mathrm{Viab}(S, n, \underline{u}) = \{x \in \mathcal{S} \text{ t.q. } \mathcal{O}x \geq (\mathbb{1} - T\mathcal{O}AB)\underline{u}\}$$

Proposition 3. Soit $\underline{u} \leq \underline{u}^*(S, n)$, $x \in \mathrm{Viab}(S, n, \underline{u})$ et

$$U_{viab}(S, n, \underline{u})(x) := \left\{u \in [\underline{u}, Cx] \text{ t.q. } \mathcal{O}Au \geq (\mathbb{1} - T\mathcal{O}AB)\underline{u} - \mathcal{O}A^2x\right\}$$

Alors $u \in U_{viab}(S, n, \underline{u})(x) \Rightarrow Ax + Bu \in \mathrm{Viab}(S, n, \underline{u})$

Viabilité et optimisation

Soit $\underline{u} < \underline{u}^*(S,n)$, alors

1. Le problème d'optimisation sous contrainte :

$$W_{\underline{u}}(x_0) = \max_{u(\cdot)} \{J(x_0, u(\cdot));\ u(t) \in [\underline{u}, Cx(t)], \forall t \geq 0\}$$

possède une solution exactement pour $x_0 \in \mathrm{Viab}(S, n, \underline{u})$.

2. Celui-ci est équivalent à considérer la dynamique

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ u(t) \in U_{viab}(S, n, \underline{u})(x(t)) \end{cases}$$

sur l'ensemble invariant $\mathrm{Viab}(S, n, \underline{u})$.

3. $W_{\underline{u}}$ est le point fixe de

$$W_{\underline{u}}(x) = \max_{u \in U_{viab}(S,n,\underline{u})(x)} \left\{U(u) + \delta W_{\underline{u}}(Ax + Bu)\right\}, \quad x \in \mathrm{Viab}(S, n, \underline{u})$$

Politique "viable gloutonne"

Soit $\underline{u} < \underline{u}^*(S, n)$.
Pour tout $x \in \text{Viab}(S, n, \underline{u})$, on pose

$$\begin{aligned} u_{VG}[x] &= \max_{u \leq CAx} \{\, u \,|\, Ax + Bu \in \text{Viab}(S, n, \underline{u}) \} \\ &= \max U_{viab}(S, n, \underline{u})(x) \end{aligned}$$

- ne sacrifie pas les besoins des générations futures
- satisfait au mieux les besoins de la génération actuelle

Exemple ($S = 24$, $n = 4$)

Stratégie optimale pour $\beta = 0.11$ et $\delta = 0.87$: **$J = 7.905$**

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_1	11	6	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	3	0	10	8	6	9	8	7	9	8	7	9	8
x_3	0	10	8	6	9	8	7	9	8	7	9	8	7
x_4	10	8	6	9	8	7	9	8	7	9	8	7	9
u	8	**6**	9	8	7	9	8	7	9	8	7	9	

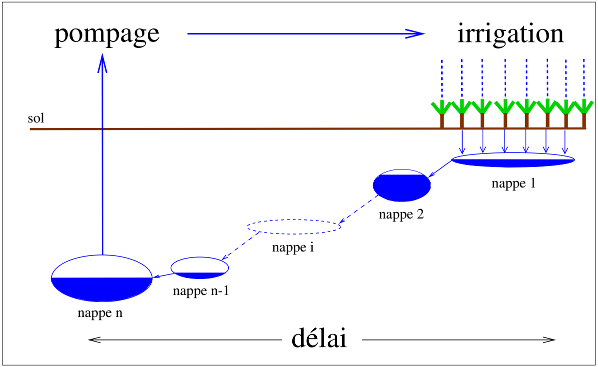
Stratégie "viable gloutonne" pour $\underline{u} = 7$: **$J = 7.902$**

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_1	11	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	3	0	10	7	7	10	7	7	10	7	7	10	7
x_3	0	10	7	7	10	7	7	10	7	7	10	7	7
x_4	10	7	7	10	7	7	10	7	7	10	7	7	10
u	7	7	10	7	7	10	7	7	10	7	7	10	

Généricité de la problématique

- ressources renouvelables présentant un retard important entre le prélèvement et sa restauration
- quantité totale de ressource disponible ou en cours de restauration constante

Autre exemple d'application :



Conclusions

I. Approche par la théorie de la commande optimale

- caractériser les conditions pour lesquelles les politiques sans anticipation sont optimales
  - risque d'une gestion non "durable"
- caractériser les conditions pour lesquelles les politiques optimales sont soutenables
  - la gestion devient "durable" après un transitoire

Outil : optimalité inverse et équation de Bellman

2. Approche par la théorie de la viabilité

- caractérisation intrinsèque de niveaux garantis de récoltes annuelles
- synthèse de politiques assurant une récolte minimale
  - gestion "durable"

Outil : Noyaux de viabilité et politiques viables

Quelques références

- Rapaport, A., Sraidi, S. and Terreaux, J.P. (2003), "Optimality of greedy and sustainable policies in the management of renewable resources", Optimal Control, Applications and Methods, Vol. 24, No. 1, pp. 23-44.
- Rapaport, A., Terreaux, J.P. and Doyen, L. (2006) "Viability analysis for the sustainable management of renewable resources", Mathematical and Computer Modelling, Vol. 43, pp. 466-484.
- De Lara M. and Doyen L. (2008) "Sustainable Management of Natural Resources. Mathematical Models and Methods", Springer.
- Piazza A. and Rapaport A. (2009), "Optimal Control of Renewable Resources with Alternative Use", Mathematical and Computer Modelling , Vol. 50 (1-2), pp. 260-272.